Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

9 класс **Заключительный тур** **2020-2021**

Вариант 2

1. (*10 баллов*) У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему в пять раз больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 84 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 35.

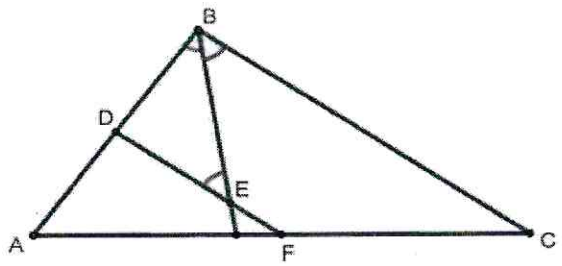
Решение. Пусть сейчас мужу $5x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y–x=5x–y$. Отсюда $y=3x$, разница в возрасте мужа и жены составляет $2x$ лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($5x$) мужу будет $7x$. Получаем уравнение $5x+7x=84$, $x=7$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=11$, $AB=5$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 3.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF-DE=(BC-AB)/2=3$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*14 баллов*) Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<2000$. Известно, что a^{23} делится на b^{11}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$23x \geq 11y$, $y \leq 2\frac{1}{11}x$. Так как a<2000, справедливо, что $x \leq 10$ (ведь уже $2^{11} > 2000$).

Итак, $y \leq 2\frac{1}{11}x \leq 2x + \frac{1}{11} \cdot 10 = 2x + \frac{10}{11}$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2021.

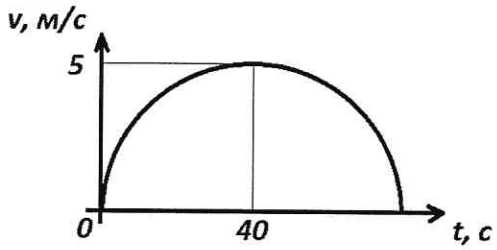
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2020$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2020}{2} = 1012$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2020 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2018$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2018$=4036. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2021.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 балла.

5. (*10 баллов*) Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые восемьдесят секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком: $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 100\pi$.

(5 баллов)

Средняя скорость: $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{100\pi}{80} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Цепочка массой m=800 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол

между потолком и цепочкой равен α=30°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 6,9 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_в \cos\alpha$, **(5 баллов)**

где $T_в$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_в \sin\alpha = mg$. **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{8}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{1} = 6{,}9$ Н. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$. **(2 балла)**

Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:

$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}$. **(2 балла)**

С учётом того, что:

$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}$. **(2 балла)**

Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta$. **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) Удельная теплоёмкость тела массой $m = 3$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 200$ Дж/(кг · °С) – удельная теплоёмкость при 0°С, $\alpha = 0{,}05$ °С$^{-1}$ – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °С до 100 °С.

Ответ: 192 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

$$c_{ср} = \frac{c_0(1+\alpha t_{\text{Н}})+c_0(1+\alpha t_{\text{К}})}{2} = 800\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{С}}.$$ **(5 баллов)**

Искомое количество тепла:

$$Q = c_{ср} m \Delta t = 800 \cdot 3 \cdot 80 = 192000\ \text{Дж} = 192\ \text{кДж}.$$ **(5 баллов)**