



**Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»  
по естественным наукам**

8 класс

**Заключительный тур  
Вариант 1**

2020-2021

**1. (10 баллов)** На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

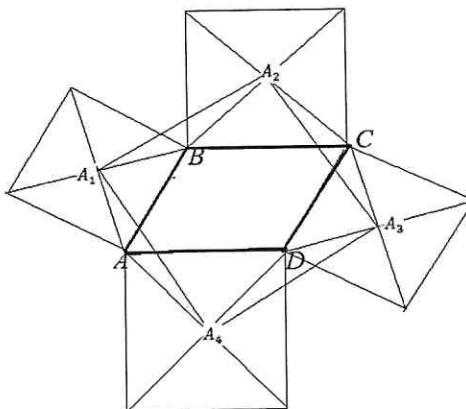
**Ответ:** через 158 с.

**Решение.** Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени  $ab:xy:zt$ . Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда  $y \geq 2$ ,  $z \geq 4$ ,  $t \geq 5$ . Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

**Оценивание.** За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

**2. (12 баллов)** На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами одного квадрата.

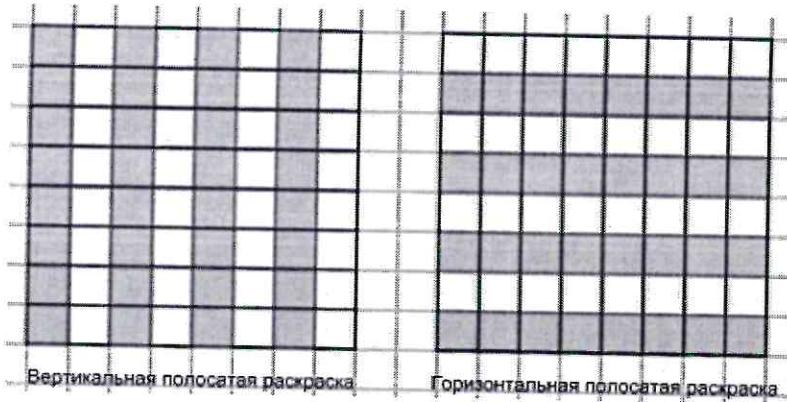
**Решение.** Пусть  $ABCD$  – данный параллелограмм, а центры квадратов –  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Тогда треугольники  $BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1$  равны по двум сторонам и углу, то есть  $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$ .



Докажем, что углы в четырёхугольнике  $A_1A_2A_3A_4$  прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен  $\alpha$ , а угол  $\angle A_1A_4A = \beta$ . Тогда  $\angle A_1AA_4 = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle AA_1A_4 = 90^\circ - \alpha - \beta$ . Следовательно,  $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$ , а угол  $\angle A_2A_1A_4 = 90^\circ - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^\circ$ . Что и требовалось доказать.

**Оценивание.** За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

**3. (14 баллов)** Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?

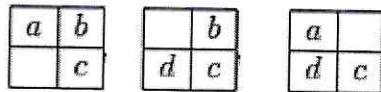


**Ответ:** можно.

**Решение.** Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

|          |          |
|----------|----------|
| <i>a</i> | <i>b</i> |
| <i>d</i> | <i>c</i> |

Если применить операции к уголкам



то окажется, что цвет поменяет только клетка *c*, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки *c* может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

**Оценивание.** За верное решение 14 баллов.

**4. (14 баллов)** Найдите все целые решения уравнения

$$x^4 + (x+1)^4 = (x+2)^4.$$

**Ответ:**  $-1$ .

**Решение.** Перепишем уравнение в виде  $(x+1)^4 = (x+2)^4 - x^4$ , по формуле разности квадратов получаем

$$(x+1)^4 = ((x+2)^2 - x^2)((x+2)^2 + x^2),$$

$$(x+1)^4 = 8(x+1)((x+1)^2 + 1).$$

Число  $(x+1)^2 + 1$  взаимно просто с  $(x+1)$ , следовательно,  $(x+1)^2 + 1 = 1$ , то есть  $x = -1$ .

**Оценивание.** За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

**5. (10 баллов)** Два литра переохлаждённой до  $t = -15^\circ\text{C}$  воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда  $900 \text{ кг}/\text{м}^3$ , воды –  $1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Удельная теплоёмкость воды  $4200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $3,3 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ .

**Ответ:** 0,42 литра.

**Решение.** Масса исходной воды:  $m = \rho V = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$  кг. (1 балл)

Уравнение теплового баланса:  $c_B m_B (0 - (-15)) = \lambda m_L$ . (5 баллов)

В результате получаем, что масса получающегося льда:

$$m_L = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 15}{330000} = \frac{21}{55} \text{ кг.} \quad (2 \text{ балла})$$

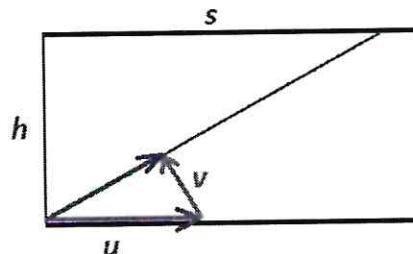
$$\text{Его объём: } V = \frac{m_L}{\rho} \approx 0,42 \text{ л.} \quad (2 \text{ балла})$$

**6. (15 баллов)** Ширина реки 40 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна  $v=2$  м/с. С учётом того, что скорость течения  $u=4$  м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

**Ответ:**  $\approx 69,3$  м.

**Решение.** Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега.

**(4 балла)**



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом:  $\sin \alpha = \frac{v}{u}$  (4 балла)

или  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{s}$ . (4 балла)

В результате получаем:  $S = \frac{H\sqrt{u^2-v^2}}{v} \approx 69,3$  м. (3 балла)

**7. (10 баллов)** Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии  $x=10$  см от опоры подвесили груз массой  $m=3$  кг и объёмом  $V=1000$  см<sup>3</sup>. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние  $\Delta x$  необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>.

**Ответ:** 5 см.

**Решение.** Условие равновесия в первом случае:  $mg \cdot x = m_{\text{стержня}} g \cdot l$ . (3 балла)

Условие равновесия в первом случае:

$$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l. \quad (3 \text{ балла})$$

В результате получаем:  $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x)$ , (2 балла)

откуда:  $\Delta x = 5 \text{ см}$ . (2 балла)

**8. (15 баллов)** Два одинаковых резистора сопротивлением  $R$  каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения  $U$ . Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными  $U_V=10 \text{ В}$ . После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра –  $I_A=10 \text{ А}$ . Определите значение  $R$ .

**Ответ:** 2 Ом.

**Решение.** Напряжение источника:  $U = U_V + U_V = 20 \text{ В}$ . (4 балла)

У идеального амперметра сопротивление:  $r_A = 0 \text{ Ом}$ . (3 балла)

Следовательно, сопротивление резистора:  $R = \frac{U}{I_A} = \frac{20}{10} = 2 \text{ Ом}$ . (3 балла)